

## 18. MATRIKS

### A. Transpose Matriks

Jika  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , maka transpose matriks A adalah  $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

### B. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua matriks dapat dijumlahkan bila kedua matriks tersebut berordo sama. Penjumlahan dilakukan dengan menjumlahkan elemen-elemen yang seletak

Jika  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , dan  $B = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ , maka  $A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+k & b+l \\ c+m & d+n \end{pmatrix}$

### C. Perkalian Matriks dengan Bilangan Real $n$

Jika  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , maka  $nA = n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} an & bn \\ cn & dn \end{pmatrix}$

### D. Perkalian Dua Buah Matriks

- Perkalian matriks A dan B dapat dilakukan bila jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris matriks B ( $A_{m \times n} \times B_{p \times q}$ , jika  $n = p$ ) dan hasil perkaliannya adalah matriks berordo  $m \times q$ .
- Hasil perkalian merupakan jumlah perkalian elemen-elemen baris A dengan kolom B.

Jika  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , dan  $B = \begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \end{pmatrix}$ , maka

$$A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak + bn & al + bo & am + bp \\ ck + dn & cl + do & cm + dp \end{pmatrix}$$

### E. Matriks Identitas (I)

- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Dalam perkalian dua matriks terdapat matriks identitas (I), sedemikian sehingga  $I \times A = A \times I = A$

### F. Determinan Matriks berordo $2 \times 2$

Jika  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , maka determinan dari matriks A dinyatakan  $\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Sifat-sifat determinan matriks bujursangkar

- $\det(A \pm B) = \det(A) \pm \det(B)$
- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

**G. Invers Matriks**

- Dua matriks A dan B dikatakan saling invers bila  $A \times B = B \times A = I$ , dengan demikian A adalah invers matriks B atau B adalah invers matriks A.

Bila matriks  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , maka invers A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \text{Adj}(A) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, ad - bc \neq 0$$

- Sifat-sifat invers matriks

$$1) (A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

$$2) (B \times A)^{-1} = A^{-1} \times B^{-1}$$

**H. Matriks Singular**

*matriks singular* adalah matriks yang tidak mempunyai invers, karena nilai determinannya sama dengan nol

**I. Persamaan Matriks**

Bentuk-bentuk persamaan matriks sebagai berikut:

$$1) A \times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$$

$$2) X \times A = B \Leftrightarrow X = B \times A^{-1}$$

SOAL	PENYELESAIAN
<p>1. UN 2010 PAKET A</p> <p>Diketahui matriks <math>A = \begin{pmatrix} 4a &amp; 8 &amp; 4 \\ 6 &amp; -1 &amp; -3b \\ 5 &amp; 3c &amp; 9 \end{pmatrix}</math></p> <p>dan <math>B = \begin{pmatrix} 12 &amp; 8 &amp; 4 \\ 6 &amp; -1 &amp; -3a \\ 5 &amp; b &amp; 9 \end{pmatrix}</math></p> <p>Jika <math>A = B</math>, maka <math>a + b + c = \dots</math></p> <p>a. -7 b. -5 c. -1 d. 5 e. 7</p> <p>Jawab : e</p>	

SOAL	PENYELESAIAN
<p>2. UN 2010 PAKET B</p> <p>Diketahui matriks-matriks <math>A = \begin{pmatrix} -c &amp; 2 \\ 1 &amp; 0 \end{pmatrix}</math>,</p> <p><math>B = \begin{pmatrix} 4 &amp; a \\ b+5 &amp; -6 \end{pmatrix}</math>, <math>C = \begin{pmatrix} -1 &amp; 3 \\ 0 &amp; 2 \end{pmatrix}</math>, dan</p> <p><math>D = \begin{pmatrix} 4 &amp; b \\ -2 &amp; 3 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Jika <math>2A - B = CD</math>, maka nilai <math>a + b + c = \dots</math></p> <p>a. -6 b. -2 c. 0 d. 1 e. 8 Jawab : c</p>	
<p>3. UN 2009</p> <p>Diketahui 3 matriks, <math>A = \begin{pmatrix} a &amp; 2 \\ 1 &amp; b \end{pmatrix}</math>,</p> <p><math>B = \begin{pmatrix} 4 &amp; 1 \\ 2 &amp; b+1 \end{pmatrix}</math>, <math>C = \begin{pmatrix} -2 &amp; b \\ -a &amp; b^2 \end{pmatrix}</math></p> <p>Jika <math>A \times B^t - C = \begin{pmatrix} 0 &amp; 2 \\ 5 &amp; 4 \end{pmatrix}</math> dengan <math>B^t</math> adalah transpose matriks B, maka nilai a dan b masing-masing adalah ...</p> <p>a. -1 dan 2 b. 1 dan -2 c. -1 dan -2 d. 2 dan -1 e. -2 dan 1 Jawab : a</p>	

SOAL	PENYELESAIAN
<p>4. UN 2008 PAKET A/B</p> <p>Diketahui matriks <math>P = \begin{pmatrix} 12 &amp; 4 \\ 0 &amp; -11 \end{pmatrix}</math>,</p> <p><math>Q = \begin{pmatrix} x &amp; 2y \\ -3 &amp; 4 \end{pmatrix}</math>, dan <math>R = \begin{pmatrix} 96 &amp; -20 \\ 66 &amp; -44 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Jika <math>PQ^T = R</math> (<math>Q^T</math> transpose matriks <math>Q</math>), maka nilai <math>2x + y = \dots</math></p> <p>a. 3 b. 4 c. 7 d. 13 e. 17</p> <p>Jawab : e</p>	
<p>5. UN 2008 PAKET A/B</p> <p>Diketahui matriks <math>P = \begin{pmatrix} 2 &amp; 5 \\ 1 &amp; 3 \end{pmatrix}</math> dan</p> <p><math>Q = \begin{pmatrix} 5 &amp; 4 \\ 1 &amp; 1 \end{pmatrix}</math>. Jika <math>P^{-1}</math> adalah invers matriks <math>P</math> dan <math>Q^{-1}</math> adalah invers matriks <math>Q</math>, maka determinan matriks <math>Q^{-1}P^{-1}</math> adalah ...</p> <p>a. 209 b. 10 c. 1 d. -1 e. -209</p> <p>Jawab : c</p>	

SOAL	PENYELESAIAN
<p>6. UN 2007 PAKET A</p> <p>Diketahui persamaan matriks <math>A = 2B^T</math> (<math>B^T</math> adalah transpose matriks B), dengan</p> $A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 2c - 3b & 2a + 1 \\ a & b + 7 \end{pmatrix}.$ <p>Nilai <math>a + b + c = \dots</math></p> <p>a. 6 b. 10 c. 13 d. 15 e. 16</p>	
<p>7. UN 2007 PAKET B</p> <p>Diketahui matriks <math>A = \begin{pmatrix} x + y &amp; x \\ y &amp; x - y \end{pmatrix}</math>,</p> $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}x \\ -2y & 3 \end{pmatrix}, \text{ dan } A^T = B \text{ dengan } A^T$ <p>menyatakan transpose dari A.</p> <p>Nilai <math>x + 2y</math> adalah ...</p> <p>a. -2                      d. 1 b. -1                      e. 2 c. 0                        Jawab : c</p>	
<p>8. UN 2006</p> <p>Diketahui matriks <math>A = \begin{pmatrix} \frac{6}{x} &amp; -\frac{10}{x} \\ -1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math> dan</p> $B = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$ <p>Jika <math>A^T = B^{-1}</math> dengan <math>A^T =</math> transpose matrik A, maka nilai <math>2x = \dots</math></p> <p>a. -8 b. -4 c. <math>\frac{1}{4}</math> d. 4 e. 8</p> <p>Jawab : e</p>	

SOAL	PENYELESAIAN
<p>9. UN 2005</p> <p>Diketahui matriks <math>A = \begin{pmatrix} 2 &amp; -3 \\ -1 &amp; 0 \end{pmatrix}</math>,</p> <p><math>B = \begin{pmatrix} -4 &amp; 2 \\ 1 &amp; 2 \end{pmatrix}</math>, dan <math>C = \begin{pmatrix} -1 &amp; 0 \\ 1 &amp; -1 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Hasil dari <math>A+(B \times C) = \dots</math></p> <p>a. <math>\begin{pmatrix} 8 &amp; -5 \\ 0 &amp; -2 \end{pmatrix}</math>                      d. <math>\begin{pmatrix} 6 &amp; 0 \\ 0 &amp; -2 \end{pmatrix}</math></p> <p>b. <math>\begin{pmatrix} 8 &amp; -9 \\ 0 &amp; -1 \end{pmatrix}</math>                      e. <math>\begin{pmatrix} 1 &amp; 1 \\ 2 &amp; -2 \end{pmatrix}</math></p> <p>c. <math>\begin{pmatrix} 2 &amp; 0 \\ 0 &amp; -2 \end{pmatrix}</math></p> <p>Jawab : a</p>	
<p>10. UN 2004</p> <p>Diketahui persamaan matriks</p> $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 2b & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ <p>Nilai a dan b adalah ...</p> <p>a. a = 1, b = 2</p> <p>b. a = 2, b = 1</p> <p>c. a = 5, b = -2</p> <p>d. a = -2, b = 5</p> <p>e. a = 4, b = -1</p> <p>Jawab : b</p>	
<p>11. UAN 2003</p> <p>Nilai <math>x^2 + 2xy + y^2</math> yang memenuhi persamaan : <math>\begin{pmatrix} 2 &amp; 6 \\ 1 &amp; -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}</math> adalah ...</p> <p>a. 1</p> <p>b. 3</p> <p>c. 5</p> <p>d. 7</p> <p>e. 9</p> <p>Jawab : a</p>	