

10. MATRIKS

A. Kesamaan Dua Buah Matriks

Dua Matriks A dan B dikatakan sama apabila keduanya berordo sama dan semua elemen yang terkandung di dalamnya sama

B. Transpose Matriks

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka transpose matriks A adalah $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

C. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Dua matriks dapat dijumlahkan bila kedua matriks tersebut berordo sama. Penjumlahan dilakukan dengan menjumlahkan elemen-elemen yang seletak

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dan $B = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$, maka $A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+k & b+l \\ c+m & d+n \end{pmatrix}$

D. Perkalian Matriks dengan Bilangan Real n

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka $nA = n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} an & bn \\ cn & dn \end{pmatrix}$

E. Perkalian Dua Buah Matriks

- Perkalian matriks A dan B dapat dilakukan bila jumlah kolom matriks A sama dengan jumlah baris matriks B ($A_{m \times n} \times B_{p \times q}$, jika $n = p$) dan hasil perkaliannya adalah matriks berordo $m \times q$.
- Hasil perkalian merupakan jumlah perkalian elemen-elemen baris A dengan kolom B.

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dan $B = \begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \end{pmatrix}$, maka

$$A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k & l & m \\ n & o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak+bn & al+bo & am+bp \\ ck+dn & cl+do & cm+dp \end{pmatrix}$$

SOAL	PENYELESAIAN
<p>1. UN 2010 IPS PAKET A Diketahui: $\begin{pmatrix} 2x-1 & 4 \\ 9 & x+y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Nilai $y - x = \dots$ a. -5 b. -1 c. 7 d. 9 e. 11 Jawab : e</p>	

SOAL	PENYELESAIAN
<p>2. UN 2009 IPS PAKET A/B</p> <p>Diketahui kesamaan matriks:</p> $\begin{pmatrix} 7 & 5a-b \\ 2a-1 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}.$ <p>Nilai a dan b berturut-turut adalah ...</p> <p>a. $\frac{3}{2}$ dan $17\frac{1}{2}$</p> <p>b. $-\frac{3}{2}$ dan $17\frac{1}{2}$</p> <p>c. $\frac{3}{2}$ dan $-17\frac{1}{2}$</p> <p>d. $-\frac{3}{2}$ dan $-17\frac{1}{2}$</p> <p>e. $-17\frac{1}{2}$ dan $-\frac{3}{2}$</p> <p>Jawab : d</p>	
<p>3. UN 2008 IPS PAKET A/B</p> <p>Diketahui $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & 6 \\ a+1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$,</p> <p>nilai $a + b + c = \dots$</p> <p>a. 11</p> <p>b. 12</p> <p>c. 13</p> <p>d. 14</p> <p>e. 16</p> <p>Jawab : a</p>	
<p>4. UN 2010 BAHASA PAKET A</p> <p>Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$</p> <p>$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.</p> <p>Hasil dari $A - C + 2B = \dots$</p> <p>a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$</p> <p>b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$</p> <p>c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -6 & 9 \end{pmatrix}$</p> <p>d. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & -9 \end{pmatrix}$</p> <p>e. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -6 & 9 \end{pmatrix}$</p> <p>Jawab : e</p>	

SOAL	PENYELESAIAN
<p>5. UN 2010 BAHASA PAKET A</p> <p>Diketahui kesamaan matrisk</p> $\begin{pmatrix} 5m+2 & 3n+m \\ 4 & 5m-2n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3m+2 & 28 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ <p>Nilai $m - n = \dots$</p> <p>a. -8 b. -4 c. 2 d. 4 e. 8</p> <p>Jawab : e</p>	
<p>6. UN 2010 BAHASA PAKET B</p> <p>Diketahui matriks-matriks $X = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$,</p> <p>$Y = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, dan $Z = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$</p> <p>Hasil dari $X + Y - Z = \dots$</p> <p>a. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$</p> <p>b. $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$</p> <p>c. $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$</p> <p>Jawab : c</p>	
<p>7. UN 2010 BAHASA PAKET B</p> <p>Diketahui $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & y \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$.</p> <p>Nilai $x + 2y = \dots$</p> <p>a. 4 b. 5 c. 6 d. 7 e. 9</p> <p>Jawab : e</p>	

SOAL	PENYELESAIAN
<p>8. UN BAHASA 2009 PAKET A/B</p> <p>Jika $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ x-3y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 2y \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$</p> <p>Maka nilai $x - 2y = \dots$</p> <p>a. 3 b. 5 c. 9 d. 10 e. 12 Jawab : a</p>	
<p>9. UN BAHASA 2009 PAKET A/B</p> <p>Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan</p> <p>$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. $M^T =$ transpose dari matriks</p> <p>M. Matriks $(5A - 2B)^T$ adalah ...</p> <p>a. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -18 & 4 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -11 & 18 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -3 & 11 \\ 4 & 18 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 3 & -11 \\ -4 & -18 \end{pmatrix}$</p> <p>Jawab : d</p>	
<p>10. UN BAHASA 2008 PAKET A/B</p> <p>Diketahui matriks</p> <p>$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & a \\ 7 & b & 5 \\ 3c & 9 & 10 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 2a & 5 \\ 5b & 9 & 10 \end{pmatrix}$</p> <p>Jika $P = Q$, maka nilai c adalah ...</p> <p>a. 5 b. 6 c. 8 d. 10 e. 30 Jawab : d</p>	

SOAL	PENYELESAIAN
<p>11. UN BAHASA 2008 PAKET A/B</p> <p>Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, dan</p> <p>$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Matriks $B \times A = \dots$</p> <p>a. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$</p> <p>b. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$</p> <p>c. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$</p> <p>Jawab : c</p>	

F. Matriks Identitas (I)

$$\blacksquare I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Dalam perkalian dua matriks terdapat matriks identitas (I), sedemikian sehingga $I \times A = A \times I = A$

G. Determinan Matriks berordo 2×2

Jika $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks A dinyatakan $\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Sifat-sifat determinan matriks bujursangkar

1. $\det(A \pm B) = \det(A) \pm \det(B)$
2. $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
3. $\det(A^T) = \det(A)$
4. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

H. Invers Matriks

- Dua matriks A dan B dikatakan saling invers bila $A \times B = B \times A = I$, dengan demikian A adalah invers matriks B atau B adalah invers matriks A.

Bila matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka invers A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \text{Adj}(A) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, ad - bc \neq 0$$

Catatan:

1. Jika $\text{Det}(A) = 1$, maka nilai $A^{-1} = \text{Adj}(A)$
 2. Jika $\text{Det}(A) = -1$, maka nilai $A^{-1} = -\text{Adj}(A)$
- Sifat-sifat invers matriks
 - 1) $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$
 - 2) $(B \times A)^{-1} = A^{-1} \times B^{-1}$

I. Matriks Singular

matriks singular adalah matriks yang tidak mempunyai invers, karena nilai determinannya sama dengan nol

SOAL	PENYELESAIAN
1. UN 2010 IPS PAKET A Diketahui matriks $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Jika $R = 3P - 2Q$, maka determinan $R = \dots$ a. -4 b. 1 c. 4 d. 7 e. 14 Jawab : c	
2. UN 2009 IPS PAKET A/B Jika diketahui matriks $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $Q = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, determinan matriks PQ adalah ... a. -190 b. -70 c. -50 d. 50 e. 70 Jawab : d	
3. UN 2008 IPS PAKET A/B Diketahui A^T adalah transpose dari matrik A. Bila $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ maka determinan dari matriks A^T adalah ... a. 22 d. 2 b. -7 e. 12 c. -2 Jawab : c	

SOAL	PENYELESAIAN
<p>4. UN 2010 IPS PAKET A</p> <p>Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ dan</p> <p>$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Jika matriks $C = A - 3B$, maka invers matriks C adalah $C^{-1} = \dots$</p> <p>a. $\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$</p> <p>b. $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$</p> <p>c. $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$</p> <p>d. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$</p> <p>e. $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$</p> <p>Jawab : d</p>	
<p>5. UN 2010 IPS PAKET A/B</p> <p>Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, dan</p> <p>$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$. Jika matriks $C = A - B$, maka invers matriks C adalah $C^{-1} = \dots$</p> <p>a. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$</p> <p>b. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$</p> <p>c. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$</p> <p>d. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$</p> <p>e. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$</p> <p>Jawab : d</p>	

SOAL	PENYELESAIAN
<p>6. UN 2009 IPS PAKET A/B</p> <p>Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Invers dari matriks A adalah $A^{-1} = \dots$</p> <p>a. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$</p> <p>b. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$</p> <p>c. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$</p> <p>Jawab : d</p>	
<p>7. UN BAHASA 2009 PAKET A/B</p> <p>Jika $N^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah invers dari matriks $N = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, maka nilai $c + d = \dots$</p> <p>a. $-2\frac{1}{2}$</p> <p>b. -2</p> <p>c. $-1\frac{1}{2}$</p> <p>d. 2</p> <p>e. -1</p> <p>Jawab : e</p>	
<p>8. UN BAHASA 2008 PAKET A/B</p> <p>Invers dari matriks $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ adalah ...</p> <p>a. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$</p> <p>b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$</p> <p>c. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$</p> <p>d. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$</p> <p>e. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$</p> <p>Jawab : b</p>	

J. Persamaan Matriks

Bentuk-bentuk persamaan matriks sebagai berikut:

1. $A \times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$
2. $X \times A = B \Leftrightarrow X = B \times A^{-1}$

SOAL	PENYELESAIAN
<p>1. UN 2010 IPS PAKET A/B</p> <p>Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, dan</p> <p>$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Matriks X yang memenuhi $AX = B$ adalah ...</p> <p>a. $\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$</p> <p>b. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$</p> <p>c. $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$</p> <p>d. $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$</p> <p>e. $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$</p> <p>Jawab : e</p>	
<p>2. UN 2008 IPS PAKET A/B</p> <p>Jika A adalah matriks berordo 2×2 yang memenuhi $A \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}$, maka matriks A = ...</p> <p>a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$</p> <p>b. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$</p> <p>c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$</p> <p>d. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$</p> <p>e. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$</p> <p>Jawab : d</p>	

SOAL	PENYELESAIAN
<p>3. UN 2010 BAHASA PAKET A</p> <p>Matriks X yang memenuhi persamaan</p> $X \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 8 & 26 \end{pmatrix} \text{ adalah ...}$ <p>a. $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$</p> <p>b. $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$</p> <p>c. $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$</p> <p>d. $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$</p> <p>e. $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$</p> <p>Jawab : a</p>	
<p>4. UN 2010 BAHASA PAKET B</p> <p>Matriks X yang memenuhi persamaan</p> $X \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ adalah ...}$ <p>a. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$</p> <p>b. $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$</p> <p>c. $\begin{pmatrix} 23 & 30 \\ -16 & -21 \end{pmatrix}$</p> <p>d. $\begin{pmatrix} 23 & 26 \\ -3 & -16 \end{pmatrix}$</p> <p>e. $\begin{pmatrix} -17 & 14 \\ 16 & -13 \end{pmatrix}$</p> <p>Jawab : c</p>	

SOAL	PENYELESAIAN
<p>5. UN BAHASA 2008 PAKET A/B</p> <p>Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan</p> <p>$B = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 11 & 29 \end{pmatrix}$ jika matriks $AX = B$, maka matriks X adalah ...</p> <p>a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$</p> <p>b. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$</p> <p>c. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$</p> <p>d. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$</p> <p>e. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$</p> <p>Jawab : b</p>	